Ensembles réguliers libres de somme

Mickaël Postic

1 Introduction

Dans cet article on s'intéresse aux ensembles d'entiers libres de somme, c'est-à-dire tels que la somme de deux éléments de l'ensemble n'appartienne jamais à l'ensemble. On va montrer que ces ensembles peuvent être représentés par une suite de 0 et de 1 dont les propriétés sont liées de près à celles de l'ensemble: l'ensemble est k-régulier si et seulement si la suite l'est. Ensuite nous traiterons quelques exemples, en particulier les suites représentant les ensembles de Cantor.

2 Définitions et lemmes

Dans cette partie nous donnons les principales définitions et quelques lemmes utiles lors des preuves des théorèmes principaux

Définition 2.1. *Un ensemble S d'entiers positifs est libre de somme si $S+S \cap S = \emptyset$. Puisque S est un ensemble d'entiers, on numérote ses éléments, et on obtient $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Cependant cette suite n'est pas la plus efficace dans notre contexte pour décrire l'ensemble S. Nous introduisons deux nouvelles suites, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui permettent d'étudier plus facilement certaines propriétés de S:

$$v_n = \{1 \text{ si } n \in S;\ * \text{ si } n \in S+S;\ 0 \text{ sinon}\}.$$

Il découle de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en supprimant les $*$; l'identification $\theta : (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une bijection. En partant d'une suite de 0 et de 1, il suffit de rajouter les $*$ à partir du début, ce qui donne une unique suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et ce de façon injective; dans l'autre sens toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne une unique suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc une bijection entre ces deux ensembles de suites, et donc entre les ensembles libres de somme et les suites de $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$:

$$\varsigma : \{0;1\}^{\mathbb{N}} \to \{\text{Ensembles libres de somme}\}. \tag{1}$$

Soit $(h(i))_{i\geq 1} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers non nuls. On peut alors définir la fonction $f : \Sigma_2^m \times \Sigma_2^m \to \mathbb{N}$ par

$$(x,y) \to f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} (x_i + y_i)h(i) + 2.$$

L'ensemble Σ_2^m introduit dans cette définition est l'ensemble des suites de 0 et de 1 de longueur m: $\{0;1\}^m$. C'est l'ensemble des entiers inférieurs à 2^m écrits en base 2 sur une longueur m.
Comme on aimerait avoir une injection, on définit

$$\widetilde{\Sigma}^m := (\Sigma_2^m \times \Sigma_2^m)/\sim$$

où $(x,y) \sim (x',y')$ si et seulement si $f(x,y) = f(x',y')$. Enfin, on définit une suite qui resservira: si n s'écrit $\epsilon_m ... \epsilon_1$ en base 2, on a

$$M_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i h(i)$$

Définissons les ensembles suivants:

$$\begin{aligned}
L_m &:= \{(u,v) \in \widetilde{\Sigma}^m : f(u,v) \leq M_{2^m}\} \\
R_m &:= \{(u,v) \in \widetilde{\Sigma}^m : M_{2^m} + 1 < f(u,v) \leq 2M_{2^m}\} \\
L(k) &:= \{(u,v) \in \widetilde{\Sigma}^m : M_k < f(u,v) < M_k + K\} \\
R(k) &:= \{(0u,1v) \in \widetilde{\Sigma}^{m+1} : M_{2^m+k} < f(0u,1v) < M_{2^m+k} + K\}
\end{aligned}$$

Proposition 2.2. $\operatorname{Card} L_m = \operatorname{Card} R_m,\ \operatorname{Card} L(k) = \operatorname{Card} R(k)$

Pour démontrer ces égalités, introduisons les deux fonctions φ_m et Ψ_m suivantes:

$$\varphi_m := \widetilde{\Sigma}^m \to \mathbb{N}, \quad (u,v) \to \varphi_m(u,v) = (\overline{u}, \overline{v})$$
$$\Psi_m := \widetilde{\Sigma}^m \to \mathbb{N}, \quad (u,v) \to \Psi_m(u,v) = (0u, 1v)$$

Il suffit alors de se servir des deux lemmes suivants:

Lemme 2.3. *$\varphi_m|_{L_m}$ est une bijection de L_m dans R_m.*

Preuve. Soit $(u,v) \in L_m$. Il nous faut montrer

$$M_{2^m} + 1 < f(\overline{u}, \overline{v}) \leq 2M_{2^m}. \tag{2}$$

Or, $f(\overline{u}, \overline{v}) = \sum(\overline{u}_i + \overline{v}_i)h(i) + 2$. Mais alors comme $\overline{u}_i = 1 - u_i$, et de même $\overline{v}_i = 1 - v_i$, on récupère:

$$f(\overline{u}, \overline{v}) = 2\sum h(i) - f(u,v) + 4. \tag{3}$$

Comme $(u,v) \in L_m$, on a $2 \leq f(u,v) \leq M_{2^m-1}$. En injectant cette inégalité dans l'égalité (2) et en remarquant que

$$M_{2^m} = \sum_{i=1}^{m} h(i) + 1 \tag{4}$$

on obtient

$$M_{2^m} + 2 \leq f(\overline{u}, \overline{v}) \leq 2M_{2^m}. \tag{5}$$

L'égalité (2) montre que l'on a affaire à une injection, pour avoir une bijection il suffit de montrer que c'est une surjection.
Soit donc $(u,v) \in R_m$, il s'agit de montrer que $(\overline{u}, \overline{v}) \in L_m$ puisque $(u,v) = \varphi_m(\overline{u}, \overline{v})$. Comme $(u,v) \in R_m$, on a

$$\sum_{i=1}^{m} h(i) + 2 < f(u,v) \leq 2(\sum_{i=1}^{m} h(i) + 1).$$

En réutilisant (2) on obtient bien $\varphi_m(u,v) \in L_m$ et donc notre lemme est démontré. $\square$

Lemme 2.4. *Pour tout $1 \leq k < 2^m$, $\Psi_m|_{L_k}$ est une bijection de $L(k)$ dans $R(k)$*

Preuve. Soit $(u,v) \in L(k)$. Montrons déjà que $\Psi_m(u,v) \in R(k)$. On a: $f(\Psi_m(u,v)) = f(0u,1v) = (0+1)h(m+1) + \sum_{i=1}^{m}(u_i+v_i)h(i) + 2$ d'où l'on récupère

$$f(\Psi_m(u,v)) = f(u,v) + h(m+1). \tag{6}$$

En appliquant cette égalité à notre (u,v), on récupère

$$M_k + h(m+1) < f(0u,1v) < M_k + K + h(m+1), \tag{7}$$

et en utilisant le fait que $M_k + h(m+1) = M_{2^m+k}$ on obtient le résultat recherché.
Maintenant pour compléter la preuve il nous reste à montrer que l'on a bien affaire à une surjection, (5) prouvant déjà que Ψ_m est une injection. Soit donc $(0u,1v) \in R(k)$, par l'égalité (5) en reprenant la forme (6) on récupère ce que l'on voulait à savoir $(u,v) \in L(k)$. Donc on a bien une bijection. $\square$

3 Théorèmes principaux

Pour énoncer le théorème suivant nous avons besoin d'introduire les deux définitions suivantes:

$$g(n) := \mu_n + \alpha_n, \tag{8}$$

$$h(n) := \left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}} g(i)\right) + 2^{n-1} \tag{9}$$

Ici α_n est le nombre d'éléments appartenant à $S+S$ entre le n-ième et le $n+1$-ième élément de S, et μ_n le nombre d'éléments n'appartenant pas à $S+S$ entre le n-ième et le $n+1$-ième élément de S. En se servant de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, α_n est le nombre de * entre le n-ième et le $n+1$-ième 1 de la suite, et μ_n est le nombre de 0 entre le n-ième et le $n+1$-ième 1 de la suite.

Théorème 3.1. *Soit* $c := 1\overbrace{0...0}^{\mu_1}1\overbrace{0...0}^{\mu_2}1....$ *Par le procédé décrit en* (1), *on peut faire correspondre un ensemble* $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Si la suite* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfait aux conditions suivantes:*

$$\begin{cases} \mu_{2^m} > \left(\sum_{i=1}^{2^m-1} \mu_i\right) + 2^m + \dfrac{3^m-1}{2} \\ \mu_{2^m+k} = \mu_k, \quad \forall 0 < k < 2^m \end{cases} \tag{10}$$

alors pour tout entier $n \geq 1$ *on a, en notant* $n = 2^k(2j+1)$*:*

$$\alpha_n = \frac{3^k+1}{2}. \tag{11}$$

Si n *s'écrit* $\epsilon_m...\epsilon_1$ *en base 2, on a*

$$S_n = 1 + \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i h(i) = M_{n+1} \tag{12}$$

Ce théorème est le premier gros résultat de cet article. La preuve se fait par induction en plusieurs étapes:

Preuve. **Étape 1**: Initialisation.
$1 = 2^0(2*0+1)$ et $\alpha_1 = 1$ puisque $2 \in S+S$ et que c'est le seul élément de $S+S$ avant le deuxième élément de S. Du coup, on a aussi $S_1 = 3+\mu_1$ et $1+h(1) = 2+g(1) = 2+\mu_1+\alpha_1 = 3+\mu_1 = S_1$. Notre théorème est donc vrai pour $n = 1$.
Étape 2: Récurrence.
On suppose le résultat vrai pour tout $n < 2^m$ pour un $m \in \mathbb{N}$ donné, et on va montrer que le résultat est vrai pour 2^m puis pour tout $2^m < n < 2^{m+1}$.
Étape 2.1: Le résultat est vrai pour $n = 2^m$.
Commençons par montrer que l'on a $\alpha_n = \frac{3^m+1}{2}$. On sait que $\mu_{2^m} > \left(\sum_{i=1}^{2^m-1} \mu_i\right) + 2^m + \frac{3^m-1}{2}$ par (10). Ceci nous permet d'affirmer que toutes les sommes possibles d'éléments de $(S_r)_{r\leq n-1}$ se retrouvent avant d'arriver à S_n. La plus grande somme possible est en effet $S_{n-1}+S_{n-1}$; il reste à montrer que $S_{n-1} \leq \mu_n$ pour conclure. Or, pour $r \geq 1$, on a:

$$S_r - S_{r-1} = \mu_r + \alpha_r + 1 \tag{13}$$

par définition de μ_r et α_r. En effectuant une somme télescopique, on obtient donc :

$$S_{n-1} - S_0 = S_{2^m-1} - 1 = \sum_{i=1}^{2^m-1} (\mu_i + \alpha_i) + 2^m - 1$$

Il nous reste à présent à calculer $\sum\limits_{i=1}^{2^m-1} \alpha_i$. Par (11), on a, $\forall q < 2^r < 2^m, \alpha_{2^r+q} = \alpha_q$. En effet, si $q = 2^k(2j+1)$, on a $2^r + q = 2^k(2j'+1)$ et (11) permet de conclure. On a donc:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^m-1} \alpha_i &= \sum_{i=1}^{2^{m-1}-1} (\alpha_i + \alpha_{2^{m-1}+i}) + \alpha_{2^{m-1}} && (14)\\
&= \frac{3^{m-1}+1}{2} + 2\sum_{i=1}^{2^{m-1}-1} \alpha_i && (15)\\
&= \frac{3^{m-1}+1}{2} + 2\frac{3^{m-2}+1}{2} + 4\sum_{i=1}^{2^{m-2}-1} \alpha_i && (16)\\
&\vdots && (17)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m-1} (3^{m-i}+1)2^{i-1}\right) && (18)\\
&= \frac{1}{2}(2^m - 1 + 3^{m-1}\frac{\frac{2}{3}^m - 1}{\frac{2}{3} - 1}) && (19)\\
&= \frac{1}{2}(2^m - 1 + 3^m - 2^m) && (20)\\
&= \frac{3^m - 1}{2} && (21)
\end{aligned}$$

On récupère donc $S_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{2^m-1} \mu_i + 2^m + \frac{3^m-1}{2} < \mu_n$. Ceci implique donc que toutes les sommes possibles d'éléments de $(S_r)_{r<n}$ se retrouvent avant

S_n et donc:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \mathrm{Card}\{x+y; x \in S; y \in S; x \leq S_{n-1}; y \leq S_{n-1}; S_{n-1} < x+y\} \\
&= \mathrm{Card}\{x+y; x \in S; y \in S; x \leq S_{n-1}; y \leq S_{n-1}\} - \sum_{i=1}^{2^m-1} \alpha_i \\
&= \mathrm{Card}\{x+y; x \in S; y \in S; x \leq S_{n-1}; y \leq S_{n-1}\} - \frac{3^m - 1}{2}
\end{aligned}$$

On pose alors:

$$\begin{aligned}
\widetilde{L_m} &:= \{x+y; x \in S; y \in S; x+y < S_{2^m-1}\} \\
\widetilde{R_m} &:= \{x+y; x \in S; y \in S; S_{2^m-1}+1 < x+y \leq 2S_{2^m-1}\}
\end{aligned}$$

On a alors vu que $\alpha_n = \mathrm{Card}\,\widetilde{R_m} + 1$ (il ne manque qu'un élément, $S_{2^m-1} + 1 = S_{2^m-1} + S_0$). Il nous faut donc calculer $\mathrm{Card}\,\widetilde{R_m}$. Or, $\widetilde{L_m} = f(L_m)$ et $\widetilde{R_m} = f(R_m)$. En effet, soit $(u, v) \in L_m$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= \sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) h(i) + 2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} u_i h(i) + 1 + \sum_{i=1}^{m} v_i h(i) + 1 \\
&= S_u + S_v
\end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence appliquée à (12).
On a de plus $S_u + S_v \leq M_{2^m} = S_{2^m-1}$. Le cas d'égalité est impossible car l'ensemble est libre de somme. Nous avons donc déjà:

$$\widetilde{L_m} \supset f(L_m).$$

On sait déjà que f est une injection, et le calcul mené ci-dessus, effectué en sens inverse, permet de montrer que l'on a affaire à une surjection en prenant un élément dans la classe de (u, v) pour tout
$(u, v) \in \{0, .., n-1\}^2$. On récupère aussi $\mathrm{Card}\,\widetilde{L_m} = \mathrm{Card}\,L_m$.
Ce raisonnement s'applique de l'exacte même manière pour montrer que l'on a $\widetilde{R_m} = f(R_m)$, et $\mathrm{Card}\,\widetilde{R_m} = \mathrm{Card}\,R_m$.

On peut alors appliquer la proposition (1.3) et conclure:

$$\alpha_n = \operatorname{Card} \widetilde{L_m} + 1 = \sum_{i=1}^{2^m-1} \alpha_i + 1 = \frac{3^m - 1}{2} + 1 = \frac{3^m + 1}{2}. \tag{22}$$

Il reste à montrer que l'on a

$$S_n = 1 + h(m+1). \tag{23}$$

Or on a $S_n - S_{n-1} = \mu_n + \alpha_n + 1$ et donc $S_n = \mu_n + \alpha_n + 1 + 1 + \sum_{i=1}^{m} h(i)$ d'après (12) car $n-1$ s'écrit 1...1 en base 2. Donc $S_n = \sum_{i=1}^{m} h(i) + g(2^m) + 2$. Pour conclure, il nous suffit de montrer le lemme suivant

Lemme 3.2. *Supposons que g satisfasse à: $\forall\ 0 \leq k < m,\ \forall\ 0 < i < 2^k,\ g(2^k + i) = g(i)$. Alors:*

$$\sum_{i=1}^{m} h(i) + g(2^m) + 2 = h(m+1) + 1$$

Preuve. On écrit:

$$\begin{aligned} h(r+1) - h(r) &= \sum_{i=2^{r-1}}^{2^r} g(i) + 2^{r-1} \\ &= h(r) + g(2^r) - g(2^{r-1}) \end{aligned}$$

Il suffit alors de faire une somme télescopique pour obtenir:

$$\begin{aligned} h(m+1) &= h(1) + \sum_{i=1}^{m} h(i) + g(2^m) - g(1) \\ &= \sum_{i=1}^{m} h(i) + g(2^m) + g(1) + 2^0 - g(1) \\ &= \sum_{i=1}^{m} h(i) + g(2^m) + 1. \end{aligned}$$

En ajoutant 1 des deux côtés de l'égalité, on obtient le lemme. □

Comme $n = 2^m$ s'écrit avec un 1 suivi de 0, (23) permet de montrer (12) pour $n = 2^m$ et notre étape 2.1 est donc finie.
Étape 2.2: Le résultat est vrai pour $2^m < n < 2^{m+1}$.
Soit $n = 2^m + k,\ 0 < k < 2^m$. On suppose le théorème vrai pour tout $i < n$. Il nous faut alors montrer le résultat pour n. On sait déjà, par la condition (10), que $\mu_n = \mu_k$. Il nous faut montrer $\alpha_n = \alpha_k$ puisque $n = 2^m + k = 2^m + 2^i(2j+1) = 2^i(2(j + 2^{m-i-1}) + 1)$, et que $S_n = h(m+1) + S_k$ puisque n s'écrit $1k$ en base 2, où k est écrit comme élément de Σ_2^m.
Puisque $S_n = S_{n-1}+\mu_n+\alpha_n+1$, et que l'on a déjà $S_{n-1} = h(m+1)+S_{k-1}$, il suffit de montrer que $\alpha_n = \alpha_k$. On peut en effet dire ensuite:

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + \mu_n + \alpha_n + 1 \\ &= h(m+1) + S_{k-1} + \mu_k + \alpha_k + 1 \\ &= h(m+1) + S_k. \end{aligned}$$

Puisque l'on s'intéresse à α_n, il nous faut regarder combien d'éléments de $S+S$ se trouvent entre S_{n-1} et S_n. Si $i, j < 2^m$, on a vu que $S_i + S_j < S_{2^m} \leq S_{n-1}$. Il nous faut donc étudier seulement l'ensemble $\{S_i + S_j, i < n, 2^m \leq j \leq n-1\}$. On a vu qu'une valeur particulière que l'on veut faire apparaître est $s := S_{2^m+k-1} + \mu_k + \alpha_k + 1$. Or, si $i, j \geq 2^m$, on va avoir $S_i + S_j > s$:

$$\begin{aligned} S_i + S_j &> S_{2^m} + S_k \\ &= 1 + h(m+1) + S_{k-1} + \mu_k + \alpha_k + 1 \\ &= S_{n-1} + \mu_k + \alpha_k + 2 \\ &> s \end{aligned}$$

Pour la première égalité on a utilisé la croissance stricte de la suite $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$.
Finalement la seule partie de $S+S$ qui nous intéresse est donc:

$$\Xi := \{S_i + S_j : i < 2^m, 2^m \leq j < n\}.$$

Si on montre que $\mathrm{Card}(\Xi \cap [S_{n-1}+1; S_n - 1]) = \alpha_k$, on aura le résultat recherché, car dans la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le terme w_s doit être labellisé par un 0, un 1 ou une $*$; comme les $\mu_k + \alpha_k$ termes précédents seront des

0 ou des $*$, il ne reste que la possibilité de mettre 1, et donc tout à la fois $S_n = s$ et $\alpha_n = \alpha_k$. On introduit alors les deux ensembles suivants (comme dans l'étape 2.1):

$$\widetilde{L}(k) := \{x \in S + S : S_{k-1} < x < S_k\}$$
$$\widetilde{R}(k) := \{x \in S + S : S_{n-1} < x < s\}$$

On a:

$$f(L(k)) = \widetilde{L}(k)$$
$$f(R(k)) \subset \widetilde{R}(k).$$

En effet, soit $(u, v) \in L(k)$. On a alors

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \sum_{i=1}^{m} (u_i + v_i) h(i) + 2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} u_i h(i) + 1 + \sum_{i=1}^{m} v_i h(i) + 1 \\ &= S_u + S_v \end{aligned}$$

On récupère aussi

$$S_{k-1} = M_k < S_u + S_v < M_k + K = S_{k-1} + \mu_k + \alpha_k + 1 = S_k$$
$$S_{k-1} < S_u + S_v < S_k.$$

et on a donc bien $f(L(k)) \subset \widetilde{L}(k)$. Comme f est une injection , pour avoir une bijection il suffit d'avoir que c'est surjectif, ce qui est très facile en remontant les calculs dans l'autre sens. Donc $\operatorname{Card} L(k) = \operatorname{Card} \widetilde{L}(k) = \alpha_k$.

Soit maintenant $(0u, 1v) \in R(k)$. Montrons que $f(0u, 1v) \in \widetilde{R}(k)$. De même que précédemment on peut écrire

$$f(0u, 1v) = S_u + S_v + h(m+1) = S_u + S_{2^m+v},$$

la dernière égalité obtenue par l'hypothèse de récurrence. Ici les conditions d'encadrement deviennent

$$M_{2^m+k} < f(0u, 1v) < M_{2^m+k} + K$$
$$S_{2^m+k-1} < S_u + S_{2^m+v} < s$$

On a bien l'inclusion $f(R(k)) \subset \widetilde{R}(k)$ recherchée, la forme particulière $(0u, 1v)$ ne permet pas de faire le calcul en sens inverse pour avoir une bijection.
On retire tout de même de ceci en appliquant la proposition (1.3):

$$\operatorname{Card} \widetilde{R}(k) \geq \operatorname{Card} R(k) = \operatorname{Card} L(k) = \operatorname{Card} \widetilde{L}(k) = \alpha_k.$$

Pour montrer l'égalité, l'article suit un chemin compliqué, alors qu'il me semble qu'il suffit d'utiliser le fait que tous les éléments de $\widetilde{R}(k)$ sont des éléments de Ξ pour pouvoir remonter les calculs et dire que l'on a une bijection, concluant ainsi la preuve. □

Définition 3.3. *Une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **k-régulière** s'il existe m sous-suites de n, $\{n_l^{(j)}\}_{l\in\mathbb{N}}(0 \leq j \leq m-1)$, qui satisfont pour tout $i \geq 0$ et $0 \leq b \leq k^i$, la sous-suite $(t_{k^i n+b})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{Z}$-combinaison linéaire des $(t_{n_l^{(j)}})_{l\in\mathbb{N}}$.*
Cette définition ressemble à la définition par le q-noyau d'une suite q-automatique, à ceci près qu'ici, on autorise les combinaisons linéaires, donnant une infinité de sous-suites au lieu d'un nombre fini.

Théorème 3.4. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux k-régulières, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\in\mathbb{N}}$ le sont aussi.*

Preuve. Pour montrer la première partie du théorème, il est intéressant d'utiliser une autre définition équivalente des suites k-régulières.

Lemme 3.5. *Une suite est k-régulière si et seulement si le $\mathbb{Z}$-module engendré par son k-noyau est généré par un nombre fini de suites, c'est-à-dire:*
$(a(n))_n$ est k-régulière si $\exists s \in \mathbb{N}, \{(a_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, ..., (a_s(n))_{n\in\mathbb{N}}\}$ tels que $\forall i \geq 0, 0 \leq b \leq k^i, \exists c_1, ..., c_n b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a(k^i n + b) = \sum_{1\leq j\leq s} c_j a_j(n).$$

Preuve. Il est déjà clair que notre définition implique cette propriété, en prenant $m = s$ et $a_j(l) = t_{n_l^{(j-1)}}$.
Maintenant si l'on suppose cette propriété, et que l'on note K le k-noyau

de notre suite, on sait que le $\mathbb{Z}$-module engendré par K est généré par un nombre fini de suites notées $(a_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, ..., (a_r(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Mais comme $(a_i(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \langle K\rangle$ pour tout i, on a que chaque $(a_i(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de K, et donc l'ensemble de ces éléments de K pour i variant de 1 à r engendre $\langle K\rangle$. Ces éléments de K sont les $(t(n_l^{(j)})_{l\in\mathbb{N}}$ recherchés, et nos deux définitions sont bien équivalentes. □

Avec cette définition équivalente, la première partie du théorème devient évidente: si $\{(u_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, ..., (u_r(n))_{n\in\mathbb{N}}\}$ génèrent le k-noyau de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{(v_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, ..., (v_t(n))_{n\in\mathbb{N}}\}$ celui de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
$\{(u_i(n)+v_j(n))_{n\in\mathbb{N}}, i \leq r, j \leq t\}$ engendrent celui de $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est donc, d'après le lemme, k-régulière.
Pour la deuxième partie du théorème, on va montrer le résultat suivant:

Lemme 3.6. *Soient $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites k-régulières. Alors leur produit de convolution $(c(n))_{n\in\mathbb{N}}$ définit par $c(n) = \sum_{i+j=n} a(i)b(j)$ est k-régulier. On le note $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b}$*

Preuve. Puisque $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites k-régulières, il existe $(a_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, .., (a_r(n))_{n\in\mathbb{N}}, (b_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, ..., (b_q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui engendrent les $\mathbb{Z}$-modules engendrés par les k-noyaux de $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b(n))_{n\in\mathbb{N}}$. On définit alors $\mathbf{u}_{i,j} = \mathbf{a}_i \star \mathbf{b}_j$ le produit de convolution de $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{b}_j$.
Montrons que le $\mathbb{Z}$-module engendré par le k-noyau de $\mathbf{c}$ est généré par les suites $(u_{i,j}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{i,j}(n-1))_{n\in\mathbb{N}}$. Il y en a un nombre fini, ce qui suffit à montrer que $\mathbf{c}$ est k-régulier, par la définition équivalente donnée dans le lemme 1.9.
Soit alors $\mathbf{A}_{e,s} = (a(k^e n+s))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{B}_{f,t} = (b(k^f n+t))_{n\in\mathbb{N}}$. Par définition des $\mathbf{a}_i$ et des $\mathbf{b}_j$, on a

$$\mathbf{A}_{e,s} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{a}_i$$

$$\mathbf{B}_{f,t} = \sum_{j=1}^{q} \nu_j \mathbf{b}_j$$

pour des λ_i et ν_i dans $\mathbb{Z}$.
On a alors:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{e,s} \star \mathbf{B}_{f,t} &= (\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{a}_i) \star (\sum_{j=1}^{q} \nu_j \mathbf{b}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbf{a}_i \star (\sum_{j=1}^{q} \nu_j \mathbf{b}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i \nu_j \mathbf{a}_i \star \mathbf{b}_j \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i \nu_j \mathbf{u}_{i,j}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{A}_{e,s} \star \mathbf{B}_{f,t} \in \langle U \rangle$ où $\langle U \rangle$ est le $\mathbb{Z}$-module généré par les $(u_{i,j}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{i,j}(n-1))_{n\in\mathbb{N}}$. De la même manière, on montre que $S^{-1}(\mathbf{A}_{e,s} \star \mathbf{B}_{f,t}) \in \langle U \rangle$ où l'on a S^{-1} qui est l'opérateur shift qui à une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ fait correspondre la suite $(u_{n-1})_{n\geq 0}$ avec la convention $u_{-1} = 0$.

Pour conclure, il nous suffit alors de montrer que pour $g \in \mathbb{N}, 0 \leq d < n$ on a:

$$c(k^g n + d) = \sum_{i=0}^{d} (\mathbf{A}_{g,i} \star \mathbf{B}_{g,d-i})\,[n] + \sum_{i=d+1}^{k^g-1} (\mathbf{A}_{g,i} \star \mathbf{B}_{g,k^g+d-i})\,[n-1]\,. \quad (24)$$

On aura en effet alors écrit les éléments du k-noyau de $\mathbf{c}$ comme sommes de combinaisons linéaires d'éléments de $\langle U \rangle$:

$$(c(k^g n + d))_{n\geq 0} = \sum_{i=0}^{d} (\mathbf{A}_{g,i} \star \mathbf{B}_{g,d-i}) + \sum_{i=d+1}^{k^g-1} S^{-1}\left(\mathbf{A}_{g,i} \star \mathbf{B}_{g,k^g+d-i}\right).$$

Donc le k-noyau est généré par un nombre fini d'éléments.
Montrons donc (24):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{g,i} \star \mathbf{B}_{g,d-i}[n] &= \sum_{r+q=n} \mathbf{A}_{g,i}\,[r]\,\mathbf{B}_{g,d-i}\,[q] \\
&= \sum_{r+q=n} a(k^g r + i) b(k^g q + d - i)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{q=0}^{n} a(k^g n + d - (k^g q + d - i))b(k^g q + d - i)$$

On a aussi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{g,j} \star \mathbf{B}_{g,k^g+d-j}[n-1] &= \sum_{r+q=n-1} \mathbf{A}_{g,j}[r]\mathbf{B}_{g,k^g+d-j}[q] \\
&= \sum_{r+q=n-1} a(k^g r + j)b(k^g q + k^g + d - i) \\
&= \sum_{q=0}^{n-1} a\left(k^g n + d - (k^g(q+1) + d - i)\right) b\left(k^g(q+1) + d - i\right)
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, on peut voir que $c(k^g n + d)$ est définie par une somme à $k^g n+d+1$ éléments, et $k^g n+d+1 = n(k^g-d-1+d+1)+d+1 = (n+1)(d+1) + n(k^g - d - 1)$ ce qui est le nombre d'éléments des deux sommes de sommes, chaque élément de la somme de somme apparaissant une fois seulement et apparaissant dans la somme définissant $c(k^g n + d)$, on a bien l'égalité voulue. □

Il suffit en effet d'appliquer ce lemme à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à la suite constante égale à 1 qui comme toute suite constante est k-automatique et donc k-régulière. □

On peut alors, grâce au théorème 3.1, énoncer le résultat suivant:

Théorème 3.7. *Si $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est 2-régulière et qu'on a* (10), *alors la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est aussi 2-régulière.*

Preuve. En appliquant le théorème 3.1, en notant $n = 2^k(2j+1)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha_{2n} &= \frac{3^{k+1}+1}{2} = 3\frac{3^k+1}{2} - 1 = 3\alpha_n - 1 \\
\alpha_{2n+1} &= \frac{3^0+1}{2} = 1
\end{aligned}$$

et $(\alpha_n)_{n\leq 1}$ est 2-régulière. En appliquant le théorème que l'on vient de montrer, ceci implique que $(\sum_{i=1}^{n} \mu_i)_{n\geq 1}$ et $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)_{n\geq 1}$ sont 2-régulières. Il est clair que la suite $(n+1)_{n\geq 1}$ aussi, et donc par le théorème que l'on vient de montrer, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi, car:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (n+1)$$

par une somme télescopique appliquée à la formule $S_n - S_{n-1} = \alpha_n + \mu_n + 1$. $\square$

4 Application aux suites de type Cantor

Dans cette partie on va exploiter nos théorèmes sur un type de suites particulier, les suites de type Cantor:

Définition 4.1. *Soient* $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, l_3 \geq 0$. *Soit* $\sigma(l_1, l_2, l_3)$ *le morphisme sur l'alphabet* $\{0; 1\}$ *donné par:*

$$1 \to 1\overbrace{0...0}^{l_1}1\overbrace{0...0}^{l_2}$$
$$0 \to \overbrace{0...0}^{l_3}.$$

*On définit alors la **suite de type Cantor** de paramètres* l_1, l_2, l_3 *comme* $\boldsymbol{c}_{l_1,l_2,l_3} = \sigma(l_1, l_2, l_3)^\infty(1)$. *Par exemple, la suite de Cantor, codant l'ensemble de Cantor, est* $\boldsymbol{c}_{1,0,3}$.

Comme on veut appliquer le théorème 3.1, on va devoir étudier la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ associée à une suite de Cantor $\mathbf{c}$.

Lemme 4.2. *Pour* $l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, l_3 \geq 2$ *et* $n \geq 1$ *quelconques fixés, on a:*

$$\mu_n = \frac{l_2(l_3^k - 1)}{l_3 - 1} + l_1 l_3^k \tag{25}$$

où on écrit $n = 2^k(2j + 1)$ *comme dans le théorème 3.1.*

Preuve. Pour un mot w sur l'alphabet $\{0, 1\}$ on a besoin de la notation suivante: $|w|_i$ qui est le nombre de i dans w, $i = 0$ ou 1. Pour simplifier l'écriture on notera aussi $\sigma := \sigma(l_1, l_2, l_3)$. Comme on a $|\sigma(1)|_1 = 2$, par une récurrence immédiate on a $|\sigma^m(1)|_1 = 2^m$. De la même façon, $|\sigma^m(0)|_0 = l_3^m$. On va maintenant raisonner par récurrence. Comme $\sigma^{m+1}(1) = \sigma^m(\sigma(1)) = \sigma^m(10..010..0) = \sigma^m(1)\sigma^m(0)...$ le début de $\sigma^\infty(1)$ est donné par $\sigma^m(1)$, donc la récurrence fera apparaître du $\sigma^{m+1}(1)$, et donc il est logique de supposer le résultat vrai pour $n < 2^m$ et montrer que le résultat est alors vrai pour $2^m \leq n < 2^{m+1}$. Comme on a $|\sigma^{m+1}(1)|_1 =$

2^{m+1} on peut se contenter d'étudier $\sigma^{m+1}(1)$.

$$\sigma^{m+1}(1) = \sigma^m(\sigma(1)) \tag{26}$$
$$= \sigma^m(1\overbrace{0...0}^{l_1}1\overbrace{0...0}^{l_2}) \tag{27}$$
$$= \sigma^m(1)\overbrace{\sigma^m(0)...\sigma^m(0)}^{l_1}\sigma^m(1)\overbrace{\sigma^m(0)...\sigma^m(0)}^{l_2} \tag{28}$$

On récupère donc que

$$\begin{aligned}\mu_{2^m} &= |\overbrace{\sigma^m(0)...\sigma^m(0)}^{l_1}|_0 + |\overbrace{\sigma^{m-1}(0)...\sigma^{m-1}(0)}^{l_2}|_0 + |\overbrace{\sigma^{m-2}(0)...\sigma^{m-2}(0)}^{l_2}|_0 + ...\\ &= l_3^m l_1 + \sum_{i=1}^{m-1} l_3^i l_2\\ &= l_3^m l_1 + l_2\frac{l_3^m - 1}{l_3 - 1}\end{aligned}$$

car les 0 sont ceux à la fin de $\sigma^m(1)$ et ceux des $\sigma^m(0)$.
D'autre part, (28) nous permet de dire que, pour $1 \leq r < 2^m$,

$$\mu_{2^m+r} = \mu_r$$

car les 1 successifs se trouvent dans le sous-mot $\sigma^m(1)$.
Ceci termine la preuve, puisque l'on a déjà vu que la puissance k est la même pour $2^m + r$ et r. □

Nous donnons maintenant un théorème de régularité sur les suites de type Cantor:

Théorème 4.3. *Soit* $\boldsymbol{c}$ *une suite de type Cantor vérifiant* $7l_3 \geq 4(l_1 + l_2)+17$ *et* $l_1(l_3-1)+l_2 > 3$ *et* S *l'ensemble libre de somme correspondant. Alors la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est 2-régulière.*

Preuve. D'après le théorème 3.7 il suffit de montrer que $(\mu_n)_{n>0}$ est 2-régulière et vérifie (10). Pour la 2-régularité, on regarde le 2-noyau, en appliquant le lemme 4.2, ce qu'on peut faire car les hypothèses du théorème impliquent celles du lemme. En effet la deuxième hypothèse donne $l_3 < 3 \Rightarrow l_1 + l_2 \geq 4$ et dans ce cas la première hypothèse donne $l_3 > 2$. On a donc:

$$\begin{aligned}
\mu_{2n} &= \frac{l_2(l_3^{k+1} - 1)}{l_3 - 1} + l_1 l_3^{k+1} && (29)\\
&= l_3(\frac{l_2(l_3^k - 1)}{l_3 - 1} + l_1 l_3^k) + \frac{l_3 l_2}{l_3 - 1} - \frac{l_2}{l_3 - 1} && (30)\\
&= l_3 \mu_n + l_2. && (31)
\end{aligned}$$

On a aussi, comme $2n + 1 = 2^0(2n + 1)$:

$$\mu_{2n+1} = \frac{l_2(l_3^0 - 1)}{l_3 - 1} + l_1 l_3^0 = 0 + l_1 = l_1. \qquad (32)$$

On peut alors utiliser la définition du lemme 3.5, qui permet d'affirmer que la suite est 2-régulière. On a aussi déjà montré que $\mu_{2^m+k} = \mu_k$. Il reste donc à montrer:

$$\mu_{2^m} > \left(\sum_{i=1}^{2^m-1} \mu_i \right) + 2^m + \frac{3^m - 1}{2}. \qquad (33)$$

On va montrer ce résultat par induction. Commençons par l'initialisation: au rang $m = 1$ on a en appliquant (31) et (32), puis les hypothèses du théorème:

$$\begin{aligned}
\mu_{2^1} &= \mu_2 \\
&= l_3 \mu_1 + l_2 \\
&= l_3 l_1 + l_2 \\
&= \mu_1 + (l_3 - 1) l_1 + l_2 \\
&> \mu_1 + 3 \\
&= \mu_1 + 2^1 + \frac{3^1 - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc le résultat est vrai au rang $m = 1$.
On suppose ensuite le résultat (33) vrai jusqu'au rang m. On a alors, en se servant de (31):

$$\mu_{2^{m+1}} = l_3 \mu_{2^m} + l_2 \geq l_3(\left(\sum_{i=1}^{2^m-1} \mu_i \right) + 2^m + \frac{3^m - 1}{2} + 1) + l_2 \qquad (34)$$

Étudions alors $\sum_{i=1}^{2^{m+1}-1} \mu_i$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2^{m+1}-1} \mu_i &= \sum_{i=1}^{2^m-1} \mu_{2i} + \sum_{i=0}^{2^m-1} \mu_{2i+1} \\ &= l_3\left(\sum_{i=1}^{2^m-1} \mu_i\right) + \sum_{i=1}^{2^m-1} l_2 + \sum_{i=0}^{2^m-1} l_1.\end{aligned}$$

Donc:

$$l_3\left(\sum_{i=1}^{2^m-1} \mu_i\right) = \sum_{i=1}^{2^{m+1}-1} \mu_i - 2^m(l_1+l_2) + l_2. \tag{35}$$

En injectant (35) dans (34) on obtient

$$\mu_{2^{m+1}} \geq \sum_{i=1}^{2^{m+1}-1} \mu_i - 2^m(l_1+l_2) + l_2 + l_3\left(2^m + \frac{3^m+1}{2}\right) + l_2 \tag{36}$$

Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer:

$$-2^m(l_1+l_2) + l_3\left(2^m + \frac{3^m+1}{2}\right) + 2l_2 \geq 2^{m+1} + \frac{3^{m+1}-1}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow l_3\left(2^m + \frac{3^m+1}{2}\right) + 2l_2 \geq 2^{m+1} + \frac{3^{m+1}+1}{2} + 2^m(l_1+l_2) \tag{37}$$

D'après les hypothèses du théorème, on a:

$$\begin{aligned}l_3\left(2^m + \frac{3^m+1}{2}\right) \geq& \frac{1}{7}(4(l_1+l_2)+17)\left(2^m + \frac{3^m+1}{2}\right) \\ l_3\left(2^m + \frac{3^m+1}{2}\right) + 2l_2 \geq& 2^{m+1} + \frac{3^{m+1}+1}{2} + 2^m(l_1+l_2) \\ &+\frac{3}{7}2^m - \frac{4}{7}\frac{3^m}{2} + \frac{10}{7}\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{7}2^m + \frac{4}{7}\frac{3^m+1}{2}\right)(l_1+l_2) + 2l_2\end{aligned}$$

Pour conclure il reste alors seulement à montrer:

$$\frac{3}{7}2^m - \frac{4}{7}\frac{3^m}{2} + \frac{10}{7}\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{7}2^m + \frac{4}{7}\frac{3^m+1}{2}\right)(l_1+l_2) + 2l_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\times 2^m - 2\times 3^m + 5 + \left(2(3^m+1) - 3\times 2^m\right)(l_1+l_2) + 14l_2 \geq 0 \quad (38)$$

La deuxième hypothèse du théorème montre $l_1 + l_2 \geq 1$. En appliquant ce résultat, on obtient que notre inégalité est vraie dès que:

$$3\times 2^m - 2\times 3^m + 5 + 2(3^m+1) - 3\times 2^m \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 7 \geq 0$$

ce qui est vrai pour tout m, donc notre propriété (33) est vraie pour tout m par récurrence. Ce qui termine notre preuve. □

Ce théorème nous permet d'énoncer les deux corollaires suivants:

Corollaire 4.4. *Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble libre de somme donné par une suite **c** satisfaisant les hypothèses du théorèmes 4.3. Pour $0 \leq j \leq 3$, la sous-suite $(S_{4n+j})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'une des deux affirmations suivantes:*

$(S_{4n+j})_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante modulo 2*

ou

$\exists\sigma : \mathbb{N} \to \{0;1\},\ (\sigma(S_{4n+j}))_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite de Thue-Morse.*

Preuve. Le théorème 3.1 s'applique ici, ce qui nous donne une écriture de S_n en fonction fonction des h_m, il nous faut donc calculer $h(n) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} (\alpha_i + \mu_i) + 2^{n-1}$. On sait déjà par (21) que $\sum_{i=1}^{2^n-1} \alpha_i = \frac{3^n-1}{2}$.

Par (35), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^n-1}\mu_i &= l_3\left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}-1}\mu_i\right)+2^{n-1}(l_1+l_2)-l_2\\
&= l_3(l_3\left(\sum_{i=1}^{2^{n-2}-1}\mu_i\right)+2^{n-2}(l_1+l_2)-l_2)++2^{n-1}(l_1+l_2)-l_2\\
&\vdots\\
&= \sum_{i=1}^{n} l_3^{i-1}(2^{n-i}(l_1+l_2)-l_2)\\
&= 2^{n-1}(l_1+l_2)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{l_3}{2}\right)^i - l_2\sum_{i=0}^{n-1} l_3^i\\
&= 2^{n-1}(l_1+l_2)\frac{\left(\frac{l_3}{2}\right)^n-1}{\frac{l_3}{2}-1}-l_2\frac{l_3^n-1}{l_3-1}\\
&= (l_1+l_2)\frac{l_3^n-2^n}{l_3-2}-l_2\frac{l_3^n-1}{l_3-1}.
\end{aligned}$$

On récupère donc:

$$h(n+1)=(l_1+l_2)\frac{l_3^n-2^n}{l_3-2}-l_2\frac{l_3^n-1}{l_3-1}+\frac{3^n-1}{2}+\alpha_{2^n}+\mu_{2^n}+2^n. \quad (39)$$

En appliquant le théorème 3.1 et le lemme 4.2, on sait que $\alpha_{2^n}=\frac{3^n+1}{2}$ et $\mu_{2^n}=\frac{l_2(l_3^n-1)}{l_3-1}+l_1l_3^n$. Introduisons ces égalités dans (39). On obtient:

$$\begin{aligned}
h(n+1) &= (l_1+l_2)\frac{l_3^n-2^n}{l_3-2}+\frac{3^n-1}{2}+\frac{3^n+1}{2}+l_1l_3^n+2^n\\
&= (l_1+l_2)\frac{l_3^n-2^n}{l_3-2}+l_1l_3^n+2^n+3^n.
\end{aligned}$$

On s'intéresse alors à la valeur modulo 2 de $h(n+1)$, on notera $\equiv$ pour modulo 2. On a vu que:

$$\begin{aligned}\frac{l_3^n - 2^n}{l_3 - 2} &\equiv \sum_{i=1}^{n} l_3^{i-1} 2^{n-i} \\ &\equiv l_3^{n-1} \\ h(n+1) &\equiv (l_1 + l_2) l_3^{n-1} + l_1 l_3^n + 1.\end{aligned}$$

Si l_3 est impair, l_3^n est impair, et de même si l_3 est pair. On a donc:

$$h(n+1) \equiv (l_1 + l_2) l_3 + l_1 l_3 + 1 \tag{40}$$

$$\equiv l_2 l_3 + 1. \tag{41}$$

Cette equivalence est vraie pour $n \geq 1$.
On utilise alors le théorème 3.2, en utilisant l'écriture $n = \epsilon_m ... \epsilon_1$ en base 2 et en écrivant $j = j_2 j_1$ toujours en base 2:

$$S_{4n+j} = 1 + \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i h(i+2) + j_2 h(2) + j_1 h(1) \tag{42}$$

$$\equiv 1 + (l_2 l_3 + 1) \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i + j_2 h(2) + j_1 h(1) \tag{43}$$

$$\equiv 1 + (l_2 l_3 + 1) t_n + j_2 h(2) + j_1 h(1) \tag{44}$$

avec t_n le n-ième terme de la suite de Thue-Morse. Si $l_2 l_3 \equiv 1$ la suite est constante modulo 2, sinon à un codage près on retrouve la suite de Thue-Morse. $\square$

Le corollaire suivant s'intéresse au cas particulier des suites de type Cantor données par des morphismes de longueur constante. Plus précisément, on s'intéresse aux suites définies par $\sigma = \sigma(l, 0, l+2) (l \geq 2)$ qui sont semblables à celle donnant l'ensemble de Cantor classique.

Corollaire 4.5. *Soit S l'ensemble libre de somme associé à la suite de type Cantor donnée par $\sigma(l, 0, l+2)$ avec $l \geq 2$.On a alors:*

Soit l est pair, et alors $(S_{2n})_{n \geq 0} \equiv (S_{2n+1})_{n \geq 0}$, et ce sont toutes deux des suites de Thue-Morse $(1 - t_n)_{n \geq 0}$;

Soit l est impair, et dans ce cas $(S_n)_{n \geq 0}$ modulo 2 est la suite de Thue-Morse sequence $(1 - t_n)_{n \geq 0}$.

Preuve. Puisque $l_2 = 0$, on a (44) qui devient $S_{4n+j} \equiv 1 + t_n + j_2 h(2) + j_1 h(1)$. Il faut alors calculer $h(1)$ et $h(2)$. En utilisant (41), on obtient: $h(2) \equiv 1$.
D'autre part, $h(1) = \mu_1 + \alpha_1 + 1 = l + 1 + 1 = l + 2 \equiv l$. Donc si $l \equiv 1$, (44) devient :

$$\begin{aligned} S_{4n+j} &\equiv 1 + j_2 + j_1 + t_n \\ &\equiv 1 + \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i + j_2 + j_1 \\ &\equiv 1 + t_{4n+j} \\ &\equiv 1 - t_{4n+j} \end{aligned}$$

car $1 + x = 1 - x + 2x$ donc $1 + x \equiv 1 - x$. On a donc $S_n \equiv 1 - t_n$.
On suppose maintenant que $l \equiv 0$, (44) devient :

$$\begin{aligned} S_{4n+j} &\equiv 1 + j_2 + t_n \\ &\equiv 1 + \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i + j_2 \\ &\equiv 1 - t_{2n+j_2} \end{aligned}$$

En écrivant $m = 2n + j_2$ on a $S_{2m+j_1} = 1 - t_m$. Et donc $(S_{2n})_{n\geq 0} \equiv (S_{2n+1})_{n\geq 0} \equiv (1 - t_n)_{n\geq 0}$. Ce qui termine la preuve. $\square$

5 Un exemple avec automaticité

Dans cette partie, nous allons montrer que certains ensembles libres de somme sont associés à des suites qui sont plus que k-régulières: des suites automatiques.

Définition 5.1. *On définit ici les ensembles $(S_n)_{n\geq 0}$ qui donnent des suites automatiques. Soit $b \geq 2$, $n \geq 0$. On définit alors $S = (S_n)_{n\geq 0}$ par $S_n = \sum_{i=0}^{m} \epsilon_i (2b-1)^{i+1} + 1$ où $\epsilon_m \ldots \epsilon_0$ est l'écriture de n en base b.*

On définit aussi les ensembles k-automatiques, comme précédemment les ensembles k-réguliers:

Définition 5.2. *Un ensemble A inclus dans $\mathbb{N}$ est dit **k-automatique** si sa suite caractéristique définie par :*

$$a_n = \begin{cases} 1 & si\ n \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$$

est k-automatique.

Lemme 5.3. *L'ensemble S définit en 5.1 est un ensemble libre de somme et est de plus $(2b-1)$-automatique.*

Preuve. Supposons que l'on a $S_n + S_m = S_r$. En base $2b-1$, S_r se termine par un 1 tandis que $S_n + S_m$ se termine par un 2; comme $b \geq 2$ ces deux quantités ne peuvent pas être égales, et donc S est bien libre de somme. Pour savoir si S est $(2b-1)$-automatique, on peut regarder le $(2b-1)$-noyau de sa suite caractéristique; si celui-ci est fini, S est $(2b-1)$-automatique. Soit donc la sous-suite $(a_{(2b-1)^r n+q})_{n\in\mathbb{N}}, q < (2b-1)^r$. On a alors deux cas qui se présentent:

$$\begin{cases} \exists \epsilon_0, .., \epsilon_m \in \{0, .., b-1\} \text{ tels que } q = \sum_{i=0}^{m} \epsilon_i (2b-1)^{i+1} + 1 \\ q \text{ ne peut pas s'écrire sous cette forme.} \end{cases}$$

Dans le premier cas, la suite $(a_{(2b-1)^r n+q})_{n\in\mathbb{N}}$ est la même que la suite $(a_{(2b-1)n+1})_{n\in\mathbb{N}}$: en effet

$a_{(2b-1)^r n+q} = 1$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0, .., \epsilon_p \in \{0, .., b-1\} \text{ tels que } (2b-1)^r n + q = \sum_{i=0}^{p} \epsilon_i (2b-1)^{i+1} + 1$$

$$\Leftrightarrow (2b-1)n + 1 = \sum_{i=r-1}^{p} \epsilon_i (2b-1)^{i-r} + 1$$

$\Leftrightarrow a_{(2b-1)n+1} = 1$

Dans le second cas si $r > 0$ la suite est composée uniquement de 0. Il n'y a donc que trois éléments dans le $(2b-1)$-noyau de la suite, donc S est $(2b-1)$-automatique. □

On a aussi l'automaticité d'une autre suite associée à l'ensemble S:

Théorème 5.4. *Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de 0 et de 1 obtenue à partir de l'ensemble S de la définition 5.1, en le regardant comme un ensemble libre de somme, et en supprimant les $*$, comme en (1). Alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(2b-1)$-automatique.*

Preuve. Afin d'étudier w_n il nous faut étudier la suite v_n. On a le résultat suivant pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{cases} v_n = 1 \Leftrightarrow \exists \epsilon_0, ..., \epsilon_m \in \{0, .., b-1\} \text{ tels que } n = \sum_{i=0}^{m} \epsilon_i (2b-1)^{i+1} + 1 \\ v_n = * \Leftrightarrow \exists \epsilon_0, ..., \epsilon_m \in \{0, .., 2b-2\} \text{ tels que } n = \sum_{i=0}^{m} \epsilon_i (2b-1)^{i+1} + 2 \\ v_n = 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

En effet, la première équivalence tombe directement de la définition de S il nous suffit donc de montrer la deuxième équivalence.

$$v_n = * \Leftrightarrow \exists r, m \in \mathbb{N}, n = S_r + S_m$$

$$\Leftrightarrow \exists \epsilon_0^r, .., \epsilon_p^r, \epsilon_0^m, .., \epsilon_p^m \in \{0, .., b-1\}, n = \sum_{i=0}^{p} (\epsilon_i^r + \epsilon_i^m)(2b-1)^{i+1} + 2$$

$$\Rightarrow \exists \epsilon_0, .., \epsilon_p \in \{0, .., 2b-2\}, n = \sum_{i=0}^{p} \epsilon_i (2b-1)^{i+1} + 2$$

Il ne reste qu'à montrer le sens retour:

$$\begin{aligned} &\exists \epsilon_0, .., \epsilon_p \in \{0, .., 2b-2\}, n = \sum_{i=0}^{p} \epsilon_i (2b-1)^{i+1} + 2 \\ \Leftrightarrow & n = \sum_{i=0}^{p} \lfloor \epsilon_i \rfloor (2b-1)^{i+1} + 1 + \sum_{i=0}^{p} \lceil \epsilon_i \rceil (2b-1)^{i+1} + 1 \end{aligned} \tag{45}$$

où $\lfloor \epsilon_i \rfloor$ désigne la partie entière inférieure de ϵ_i et $\lceil \epsilon_i \rceil$ la partie entière supérieure. Puisque $\epsilon_i \leq 2b-2$ on a $\lfloor \epsilon_i \rfloor \in \{0, .., b-1\}$ et aussi $\lceil \epsilon_i \rceil \in \{0, .., b-1\}$. Donc on a le résultat recherché.

Le cas $v_n = *$ se produit donc dès que $n \equiv 2 \pmod{2b-1}$. Donc pendant que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avance de $2b-1$ termes, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avance de $2b-2$ termes. Plus précisément, on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{(2b-2)n+1} = v_{(2b-1)n+1} \\ w_{(2b-2)n+i} = v_{(2b-1)n+i+1}. \end{array} \right. \tag{46}$$

Mais comme on ne tombe jamais sur les termes labellisés $*$ de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a aussi:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{(2b-2)n+1} = a_{(2b-1)n+1} \\ w_{(2b-2)n+i} = a_{(2b-1)n+i+1} \end{array} \right. \tag{47}$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite caractéristique de l'ensemble S. On peut alors appliquer le lemme 5.3 à l'ensemble S; on récupère le fait que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(2b-1)$-automatique. Ceci implique que son $(2b-1)$-noyau est fini; à plus forte raison le $(2b-1)$-noyau des sous-suites $(a_{(2b-1)n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{(2b-1)n+i+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est fini. Donc le $(2b-1)$-noyau des suites $(w_{(2b-2)n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{(2b-2)n+i})_{n\in\mathbb{N}}$ est fini. Ceci entraîne que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(2b-1)$-automatique:

Lemme 5.5. *Soit $a > 0$ un entier et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $(u_{an+i})_{n\in\mathbb{N}}$ est k-automatique pour $0 \leq i < a$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est k-automatique.*

Preuve. Puisque les $(u_{an+i})_{n\in\mathbb{N}}$ sont k-automatiques pour $0 \leq i < a$, on a les $(u_{a(k^r+i)+j})_{n\in\mathbb{N}}$ pour $i < k^r$ et $0 \leq j < a$ qui sont en nombre fini.
Montrons alors que le k-noyau de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fini, donc que les suites $(u_{k^r n+i})n \in \mathbb{N}$ sont en nombre fini.

Soit $r \in \mathbb{N}$, $i < k^r$. Par division euclidienne, on peut écrire $i = ai' + j'$, où $j' < a$. De même, $k^r = ai'' + j''$ où $j'' < a$. On a alors:

$$u_{k^r na+i} = u_{a(k^r n+i')+j'}$$

et on constate que la sous-suite de $(u_{k^r n+i})_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{aligned} \varphi :&\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ &n \to an \end{aligned}$$

est l'une des suites $(u_{a(k^r n+i)+j})_{n\in\mathbb{N}}$. De même, on a:

$$u_{k^r na+k^r+i} = u_{a(k^r n+i'+i'')+j'+j''}$$

On a alors plusieurs cas possibles:
$j' + j'' < a$ et $i' + i'' < k^r$, alors on a $u_{k^r na+k^r+i} = u_{a(k^r n+i''')+j'''}$ et la sous-suite de $(u_{k^r n+i})_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{aligned} \varphi :&\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ &n \to an + 1 \end{aligned}$$

est l'une des suites $(u_{a(k^r n+i)+j})_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $j' + j'' < a$ et $i' + i'' \geq k^r$, alors $u_{k^r na+k^r+i} = u_{a(k^r(n+1)+i''')+j'''}$ avec $i''' < k^r$ et $j''' < a$. De même que précédemment, on a la sous-suite de $(u_{k^r n+i})_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{aligned} \varphi :&\mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ &n \to an + 1 \end{aligned}$$

est l'une des suites $(u_{a(k^r n+i)+j})_{n\in\mathbb{N}}$ décalée de un terme, donc une transformation d'un des éléments des k-noyaux dont on a déjà montré la finitude.
Si $j' + j'' \geq a$ et $i' + i'' + 1 < k^r$, alors $u_{k^r na+k^r+i} = u_{a(k^r n+i'+i''+1)+j'''} = u_{a(k^r n+i''')+j'''}$ avec $i''' < k^r$ et $j''' < a$. De même que précédemment la sous-suite est un élément des k-noyaux.
Enfin si $j' + j'' \geq a$ et $i' + i'' + 1 \geq k^r$, on a $u_{k^r na+k^r+i} = u_{a(k^r(n+1)+i''')+j'''}$ avec $i''' < k^r$ et $j''' < a$, et comme précédemment on a un élément des k-noyaux translaté de 1.

On montre, de la même façon, que les sous-suites $(u_{ak^r n+bk^r+i})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments des k-noyaux, peut-être translatés jusqu'à $a-1$ termes. Cela donne un nombre fini de suites (au plus a fois la somme des tailles des k-noyaux qui sont finis). Les suites éléments du k-noyau de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc entièrement déterminées par le choix de a sous-suites dans un ensemble fini, elles sont donc en nombre fini elles-mêmes. Donc le k-noyau est fini et notre suite est bien k-automatique. □

On peut alors appliquer ce théorème à notre situation: puisque les $(2b-1)$-noyaux des suites $(w_{(2b-2)n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{(2b-2)n+i})_{n\in\mathbb{N}}$ sont finis, ces sous-suites sont $(2b-1)$-automatiques, pour $2 \leq i \leq 2b-1$. Ceci termine donc la preuve de notre théorème. □

6 Un cas particulier: les suites à croissance rapide

Dans cette partie, nous allons montrer que si $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissant rapidement, on connaît précisément l'écriture de S_n:.

Proposition 6.1. *Supposons que la suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ satisfait:*

$$\mu_{n+1} > 2\sum_{i=1}^{n} \mu_i \text{ et } \mu_1 \geq 1. \tag{48}$$

Alors en posant comme d'habitude $S_0 = 1$ on a pour tout $n \geq 1$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \mu_i + \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{49}$$

Preuve. On sait que pour $n \geq 0$ on a $S_{n+1} = S_n + \mu_{n+1} + \alpha_{n+1} + 1$. Donc si le résultat annoncé est vrai au rang n, on obtient

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i + \alpha_{n+1} + 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i + \frac{(n+2)(n+3)}{2} - (n+2) + \alpha_{n+1} + 1. \end{aligned}$$

On s'aperçoit alors que pour prouver la récurrence au rang $n+1$ il suffit de prouver que $\alpha_{n+1} = n+1$; à l'inverse si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\alpha_n = n$, par une somme télescopique sur notre formule $S_{n+1} - S_n = \mu_{n+1} + \alpha_{n+1} + 1$ on obtient

$$\begin{aligned} S_n &= S_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + n \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \sum_{i=1}^{n} i + n + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Pour terminer cette preuve, il ne reste alors qu'à montrer que $\alpha_n = n$ pour $n \geq 1$. Pour montrer ceci, il suffit de montrer que pour tout n, $S_n + S_n \leq S_{n+1}$. Ceci impliquera que les $n+1$ sommes $S_n + S_i$ pour $0 \leq i \leq n$ sont comptabilisées dans α_{n+1} et que ce sont les seules, les autres sommes étant plus petites que S_n.

Supposons donc que, jusqu'au rang $n \geq 1$ on a $\alpha_m = m$, $S_{m-1} + S_{m-1} \leq S_m$ et $S_m = \sum_{i=1}^{m} \mu_i + \frac{(m+1)(m+2)}{2}$. Pour montrer la récurrence, comme on vient de le dire, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} & S_n + S_n \leq S_{n+1} \\ \Leftrightarrow\ & S_{n+1} - S_n \geq S_n \\ \Leftrightarrow\ & \mu_{n+1} + \alpha_{n+1} + 1 \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Or, $\mu_{n+1} > 2\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ donc $\mu_{n+1} \geq 2\sum_{i=1}^{n} \mu_i + 1$. De même, on a $\alpha_{n+1} \geq 1$ en regardant l'élément $S_n + 1 = S_n + S_0 \leq S_{n+1}$.
Finalement on obtient $\mu_{n+1} + \alpha_{n+1} + 1 \geq 2\sum_{i=1}^{n} \mu_i + 3$. On a donc $S_n + S_n \leq S_{n+1}$ dès que

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i + 3 \geq \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Supposons $\sum_{i=1}^{r} \mu_i + 3 \geq \frac{(r+1)(r+2)}{2}$. On a alors:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r+1} \mu_i + 3 &\geq \frac{(r+1)(r+2)}{2} + \mu_{r+1} \\
&\geq \frac{(r+1)(r+2)}{2} + 2\sum_{i=1}^{r} \mu_i + 1 \\
&\geq \frac{(r+1)(r+2)}{2} + 1 + (r+1)(r+2) - 6 \\
&\geq \frac{(r+3)(r+2)}{2} + r(r+2) - 5 \\
&\geq \frac{(r+3)(r+2)}{2} \text{ dès que } r(r+2) \geq 5 \text{ soit } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Il ne nous reste plus alors qu'à vérifier que pour $r = 1$ et $r = 2$, on a bien le résultat $\sum_{i=1}^{r} \mu_i + 3 \geq \frac{(r+1)(r+2)}{2}$: $\mu_1 + 3 \geq 4 \geq \frac{(1+1)(1+2)}{2} = 3$ et $\mu_1 + \mu_2 + 3 \geq 7 \geq \frac{(2+1)(2+2)}{2} = 6$. Ceci fini de prouver que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{r} \mu_i + 3 \geq \frac{(r+1)(r+2)}{2}$, et donc la propriété $\alpha_n = n$ et tout ce qui va avec est récurrente. L'initialisation se fait alors sur un terme, ce qui est évident puisque $\alpha_1 = 1$ et $S_1 > S_0 + S_0$ viennent tout deux du fait que $S_0 = 1$ et que S est libre de somme, et l'égalité $S_1 = S_0 + \mu_1 + \alpha_1 + 1$ donne $S_1 = \sum_{i=1}^{1} \mu_1 + \frac{2*3}{2}$. Notre proposition est ainsi démontrée. $\square$

Contrairement à ce qui était annoncé par l'article initial, ce résultat n'est pas forcément vrai si on prend $\mu_1 = 0$: en effet on a alors $S_1 = 3$, ce qui est conforme au résultat de l'article, puis la plus petite valeur que l'on puisse prendre pour μ_2 est 1, elle donne $S_2 = 7$ qui est encore conforme au résultat annoncé, mais cela ne marche plus au rang 3: on peut prendre $\mu_3 = 3$ qui donne $S_3 = 12$ et $\alpha_3 = 2$. L'hypothèse $\mu_1 \geq 1$ non faite par l'article initialement, est donc essentielle.